DEVOIR MAISON III

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

1. Ce devoir n'est pas noté. Vous pouvez utiliser toutes les ressources qui vous semblent pertinentes mais il est vivement conseillé de vous mettre dans des conditions d'examen. Si vous avez besoin de vous référer au cours, assurez-vous de mémoriser les résultats ou méthodes qui vous ont servi.
2. Vous pouvez travailler à plusieurs mais de préférence en petits groupes de 3 ou 4 étudiants. Faites alors attention à laisser chacun s'exprimer et participer à la résolution de l'exercice. Ne passez pas à la question suivante avant de vous être assurés que chaque membre du groupe a compris la solution.
3. Dans ce cas, indiquez les autres étudiants avec qui vous avez travaillé.
4. Même dans le cas d'un travail en commun, chacun doit **rédiger sa propre solution**.
5. L'un des objectifs de ce devoir est de perfectionner sa qualité de rédaction. Vous prendrez donc soin d'attacher une importance particulière à votre manière de rédiger (précision du raisonnement, résultats du cours cités avec rigueur, faire attention aux connexions logiques,...).

Exercice 1 **EDHEC** 2025 Exercice 1.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie pour tout $x \in [0,1]$, par

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n.$$

1. **a.** Montrer que f_n est strictement croissante sur $[0,1]$.
   b. En déduire que l'équation $f_n(x) = 1$ d'inconnue x, possède une seule solution notée u_n, élément de $[0,1]$.
   c. Donner la valeur de u_1.
2. **a.** Pour tout $x \in [0,1]$, exprimer $f_{n+1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$.
   b. En déduire que $f_{n+1}(u_n) \geqslant 1$.
   c. Utiliser les variations de f_{n+1} pour conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   d. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note ℓ sa limite.
3. **a.** Pour tout $x \neq 1$, rappeler la formule donnant $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k$ en fonction de x et de n.
   b. En déduire que pour tout réel $x \neq 1$, on a l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

Date: 3 Novembre 2025.
http://louismerlin.fr.

c. Donner alors une expression sans symbole $\sum$ de $f_n(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$.

4. **a.** Déterminer u_2 puis en déduire que si n est supérieur ou égal à 2, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n^n$.

c. En revenant à la définition de u_n, montrer, pour tout $n \geqslant 2$, l'égalité :

$$u_n^2 - 3u_n + 1 = nu_n^{n+2} - (n+1)u_n^{n+1}.$$

d. Donner finalement la valeur de ℓ.